## 10. évfolyam – fakultációs foglalkozás

Óraszám: 36 óra.

A témakörök áttekintő táblázata:

|  |  |
| --- | --- |
| ***Témakör neve*** | ***Óraszám*** |
| 1. Halmazok | 4 |
| 2. Matematikai logika | 4 |
| 3. Hatvány, gyök | 4 |
| 4. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek | 8 |
| 5. A kör és részei | 6 |
| 6. Transzformációk, szerkesztések | 6 |
| 7. Valószínűségszámítás | 4 |
| *Összes óraszám:* | *36* |

*1. Halmazok*

Óraszám: 4 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* Jártasságot szerez halmaazelméletifeladatok megoldásában
* Tudja alkalmazni problémamegoldásra, matematikai modellek alkotására ismereteit

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* meg tudja állapítani halmazok számosságát
* ismeri a halmazműveleteket, tulajdonságaikat
* ismeri és alkalmazza az euklideszi szerkesztést
* ismer nevezetes ponthalmazokat

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Halmazok számossága
* Véges és végtelen halmazok, megszámlálható, nem megszámlálható halmazok
* Matematikatörténet: Georg Cantor
* Halmazműveletek és tuéajdonságaik
* Halmazok felbontása diszjunkt halmazok uniójára
* Halmazok Descartes-szorzata
* Euklideszi szerkesztés fogalma, szerkesztések nevezetes ponthalmazok használatával
* A parabola, ellipszis, hiperbola – mint nevezetes ponthalmazok

Fogalmak: Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, szimmetrikus differencia, komplementer halmaz, Descartes-féle szorzat, euklideszi szerkesztés, parabola, ellipszis, hiperbola.

Javasolt tevékenységek

* Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
* Stratégiai játékok, például egyszerű NIM játékok, táblás játékok
* Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

*2. Matematikai logika*

Óraszám: 4 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* A hétköznapi életben használt logikai következtetéseket és a matematikai logikában használt kifejezéseket össze tudja vetni
* Felfedezzen hétköznapi, nem tudományos szövegekben található matematikai információkat, rendszerezze a célnak megfelelően
* Matematikai állításokat helyesen megfogalmazzon

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* Ismer több bizonyítási fajtát
* Ismer logikai műveleteket és alkalmazza őket feladatokban

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Matematikai tartalmú szöveg értelmezése
* Tétel kimondása, bizonyítása
* Direkt, indirekt bizonyítás
* Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel
* Állítások megsejtése, bizonyítás vagy cáfolat megadása. Skatulyaelv
* Logikai műveletek: NEM, ÉS, VAGY, „minden”, „van olyan”, „ha…akkor”, „akkor és csak akkor”
* Loikai műveletek és halmazműveletek kapcsolata
* Logikai szita
* Skatulyaelv

Fogalmak: logikai műveletek, logikai szita, skatulyaelv, direkt bizonyítás, indirekt bizonyítás

Javasolt tevékenységek

* Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
* Stratégiai játékok, például egyszerű NIM játékok, táblás játékok
* Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok
* Tantárgyi koordináció: magyar nyelv és irodalom: érvelés, vitakultúra fejlesztése; fizika: logikai áramkörök

*3. Hatvány, gyök*

Óraszám: 4 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát, azonosságait
* ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* megold magasabb szintű n-edik gyökös feladatokat
* biztonsággal számol magasabb szintű racionális kitevőjű hatványt tartalmazó feladatokat

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Az n-edik gyök fogalmának, azonosságainak ismerete és alkalmazása
* Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén, azonosságaik alkalmazása
* A hatványozás szemléletese és értelmezése irracionális kitevő esetén
* Gyöktelenítés (számláló, nevező), kivitel a gyökjel alól, bevitel a gyökjel alá
* Tudja indirekt bizonyítani:  irracionális, ha n nem négyzetszám;
* Vannak ismeretei a szerkeszthetőség kérdéséről e témakörben;

Fogalmak: négyzetgyök, n-edik gyök, racionális kitevő, permanencia-elv

Javasolt tevékenységek

* A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
* Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában

*4. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek*

Óraszám: 8 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
* adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
* a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
* a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
* a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
* felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
* egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
* megold magasabb szintű másodfokú egyenleteket, egyenlőtlenségeket, egyenletrendszereket, paraméteres egyenleteket, magasabb fokú egyenleteket, szélsőérték problémákat, négyzetgyökös és n-edik gyökös egyenleteket

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* megold másodfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket;
* ismeri és alkalmazza a diszkriminánst, a megoldóképletet és a gyöktényezős alakot, Viéte-formulákat;
* megold magasabb fokú, n-edik gyökös, paraméteres és szimmetrikus egyenleteket

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Megoldóképlet bizonyítása
* Teljes négyzetté alakítás
* Másodfokú egyismeretlenes egyenletek megoldása algebrai és grafikus úton
* Diszkriminináns, gyöktényezős alak
* Viète-formulák alkalmazása, bizonyítása
* Szélsőértékfeladatok megoldása a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával és grafikusan
* Másodfokúra visszavezethető egyenletek
* Másodfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok
* Másodfokú paraméteres egyenletek
* Négyzetgyökös egyenlőtlenségek
* Magasabb szintű gyökös egyenletek
* Az egyenlet ekvivalens és nem ekvivalens megoldási lépéseinek fogalma
* Aranymetszés fogalma, az aranymetszési arány bizonyítása

Fogalmak: másodfokú egyenlet megoldóképlete, diszkrimináns, gyöktényezős alak, ekvivalens átalakítás, Viète-formulák, paraméteres egyenlet, szélsőérték, magasabb fokú egyenlet

Javasolt tevékenységek

* Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása során
* Tanulói kiselőadás tartása magasabb fokú egyenletek megoldásának történetéről, érdekességeiről
* Kapcsolódás: fizika – egyenletesen gyorsuló mozgás
* Aranymetszés példák ismerete (festészet, építészet, biológia stb.)
* Szimmetrikus egyenletek megoldása

*5. A kör és részei*

Óraszám: 6 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* változatos feladatokban geometriai ismereteit gyarapítsa és a geometriai szemléletmódját fejlessze
* szerkesztéseket végezzen
* szerkesztési feladatokat kövessen számítógépes programokkal
* megismerjen a körrel kapcsolatos tételeket

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismer és bizonyít körrel kapcsolatos tételeket (érintőnégyszög, húrnégyszög, szelőszakasz), ismeri a pontnak körre vonatkozó hatványa fogalmakat

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Kör érintőjének fogalma, kapcsolata az érintési pontba húzott sugárral
* Középponti szög, a hozzá tartozó körív és körcikk fogalma
* Kerületi és középponti szögek tételének, kerületi szögek tételének ismerete és bizonyítása
* Látószög körív ismerete, szerkesztése
* Érintőnégyszög, húrnégyszög tétel ismerete, bizonyítása
* Érintő és szelőszakaszok tételének és a szelőszakaszok tételének ismerete, bizonyítása
* pontnak körre vonatkozó hatványa fogalmának ismerete

Fogalmak: középponti szög, körív, körcikk, körgyűrű, körszelet, érintőszakaszok, érintőnégyszög, húrnégyszög

Javasolt tevékenységek

* érintő és szelőszakaszok tétel felfedeztetése számítógépes program segítségével

*6. Transzformációk, szerkesztések*

Óraszám: 6 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* változatos feladatokban geometriai ismereteit gyarapítsa és a geometriai szemléletmódját fejlessze
* szerkesztéseket végezzen
* szerkesztési feladatokat kövessen számítógépes programokkal
* ismerje a hasonlósággal kapcsolatos alapvető fogalmakat és tételeket és bizonyításokat

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* ismer hasonlósággal kapcsolatos tételeket, ezeket alkalmazza magasabb szintű feladatokban
* gyakorlati feladatok hasonlósággal történő megoldásában jártasságot szerez (például alaprajz-, térképkészítés, modellezés)

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Megismeri és bizonyítja a párhuzamos szelők tételét, megfordítását, következményeket: szögfelező tétel, a párhuzamos szelőszakaszok tétele
* Tud negyedik arányost szerkeszteni
* Megismeri az Euler-egyenes és a Feuerbach-kör fogalmát, ezeket bizonyítja
* Ismeri és bizonyítja az arányossági tételeket a háromszögekben: magasságtétel, befogótétel
* Ismeri a számtani és a mértani, négyzetes és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget, algebrai és geometriai bizonyítást tud adni, tud mértani közepet szerkeszteni

Fogalmak: középpontos hasonlósági transzformáció, hasonlósági transzformáció, hasonlóság, a hasonlóság aránya, számtani közép, mértani közép, harmonikus közép, négyzetes közép

Javasolt tevékenységek

* Az iskola közelében lévő magas épület (például templomtorony) magasságának meghatározása egy egyenes bot segítségével a bot és az épület árnyékának méréséből („Thalész-módszer”) csoportmunkában
* Valódi távolságok, valódi útvonalak hosszának meghatározása papíralapú térkép alapján
* Feuerbach-kör – számítógépes programmal követés a kiindulási adatok változása esetén
* Fizika: hasonlóság alkalmazása geometriai optikai feladatokban

*7. Valószínűségszámítás*

Óraszám: 4 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza
* képes a valószínűség meghatározására kombinatorikus eszközökkel

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

* tapasztalatai alapján véletlen jelenségek jövőbeni kimenetelére ésszerűen tippel;
* véletlen kísérletek adatait rendszerezi, relatív gyakoriságokat számol
* megold magasabb szintű feladatokat

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Valószínűségi kísérletek elvégzése, gyakorisági, relatív gyakorisági táblázatok készítése
* A valószínűség fogalmának bevezetése statisztikai alapon
* A klasszikus valószínűségi modell fogalma és alkalmazása
* Véletlen jelenségek megfigyelése.
* Kockadobások, pénzérme
* A valószínűség meghatározása kombinatorikus eszközökkel

Fogalmak: valószínűségi kísérlet, esemény, elemi esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, komplementer esemény, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség

Javasolt tevékenységek

* Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (például dobások szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; tippelés az egyes kimenetelekre és becslés a bekövetkezésük valószínűségére
* Játékokban a szerencsefaktor vizsgálata, például „Ki nevet a végén” játék esetében az első hatos dobás eloszlása
* Különböző társasjátékokban stratégia meghatározása, döntéshozatal esélylatolgatás alapján
* Különböző szerencsejátékok (lottó, totó, póker, black jack, internetes sportfogadások) esetében a nyerési esély összehasonlítása