## 12. évfolyam – emelt szintű érettségi vizsgára felkészítő foglalkozás

Óraszám: 231 óra.

A témakörök áttekintő táblázata:

|  |  |
| --- | --- |
| ***Témakör neve*** | ***Óraszám*** |
| 1. Sorozatok | 30 |
| 2. Integrálszámítás | 46 |
| 3. Térgeometria, felszín, térfogat | 30 |
| 4. Matematikai logika, kombinatorika, gráfok | 20 |
| 5. Rendszerező összefoglalás | 105 |
| *Összes óraszám:* | *230* |

*1. Sorozatok*

Óraszám: 30 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;
* a számtani/mértani sorozat n-edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;
* a számtani/mértani sorozatok első n tagjának összegét kiszámolja;
* ismeri a sorozatok kapcsolatát a megfelelő lineáris, illetve exponenciális függvényekkel;
* ismeri a sorozatok kapcsolatát a megfelelő számtani, illetve mértani közepekkel;
* ismeri a különböző kamatozási lehetőségeket;
* ismeri és alkalmazza a kamatos kamattal kapcsolatos lehetőségeket, törlesztési és járulékszámítási eseteket;
* mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában.
* ismeri a mértani sor fogalmát és konvergencia-tartományát;
* át tudja váltani a végtelen szakaszos tizedes törteket közönséges törtté.

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele.
* Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása.
* Összefüggések, képletek hatékony alkalmazása.
* A végtelen matematikai fogalmának használata.
* A határérték fogalmának kialakítása szemléletes megközelítésből indulva.

Fogalmak: Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat.

Korlátos, monoton, konvergens sorozat. Végtelen mértani sor.

Javasolt tevékenységek

* A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása, korábbi ismeretek rendszerező ismétlése
* A teljes indukció módszerének ismétlése
* Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat
* Matematikatörténeti áttekintés: Fibonacci
* Számtani sorozat – lineáris függvény, a kapcsolat megállapítása
* A számtani sorozat n-edik tagjának kiszámolása
* A számtani sorozat első n tagjának összegének számolása
* A számtani közép tulajdonság alkalmazása
* Számítási feladatok megoldása a számtani sorozat felismerésére, az összefüggések alkalmazására
* Szöveges faladatok megoldása gyakorlati alkalmazásokkal
* Matematikatörténet visszatekintés: Gauss
* Mértani sorozat – exponenciális függvény, a kapcsolat megállapítása
* A mértani sorozat n-edik tagjának meghatározása
* A mértani sorozat első n tagja összegének kiszámolása
* A mértani közép tulajdonság vizsgálata
* Számítási feladatok végzése a mértani sorozat felismerésére, az összefüggések alkalmazására
* Szöveges feladatok megoldás gyakorlati alkalmazásokkal
* Kamatozási lehetőségek áttekintése
* Pénzügyi alapfogalmak bevezetése – kamatos kamat, diszkontálás, törlesztés, hitel, THM, gyűjtőjáradék
* A végtelen mértani sor értelmezése, vizsgálata
* A racionális számok és a végtelen szakaszos tizedes törtek ismétlése
* Végtelen szakaszos tizedes törtek átalakítása közönséges törté
* Valós számok közelítése racionális számokkal.
* A kör kerületének vizsgálata, a π közelítése
* Matematikatörténeti áttekintés: a π története

*2. Integrálszámítás*

Óraszám: 46 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri a görbe alatti terület fogalmát;
* tud felosztásokkal területet számolni;
* ismeri a határozott és a határozatlan integrál fogalmát;
* ismeri a folytonos függvények integrálhatóságát,
* ismeri a primitív függvény fogalmát, illetve az integrál és a derivált kapcsolatát,
* tudja és képes alkalmazni az integrálási szabályokat,
* meg tudja határozni a tanult elemi függvények integrálját;
* ismeri és tudja alkalmazni a Newton-Leibniz- formulát;
* ismeri és tudja alkalmazni a parciális integrálás szabályát;
* ki tudja számolni a függvények által közrezárt területet integrálással;
* tudja, hogyan használható az integrálás forgástestek térfogatának felszínének kiszámítására.

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Az integrálszámítás elemeivel ismerkedve a közelítés módszerének bővítése.
* A szemléletes kép és a pontos definíció közelítése egymáshoz.
* A Newton–Leibniz-tétel alkalmazása a matematika és a fizika több területén.
* Ismerkedés olyan példákkal is, amikor csak közelítő eredmény kapható.

Fogalmak: Alsó és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Newton Leibniz-tétel.

Javasolt tevékenységek

* Bevezető feladatok megoldása az integrál fogalmához
* Függvény grafikonja alatti terület vizsgálata
* A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület kapcsolatának áttekintése
* A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján
* Alsó és felső közelítő összegek felírása
* Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása
* Közelítés véges összegekkel
* A határozott integrál fogalmának megadása, jelölések megismerése
* Példa keresése nem integrálható függvényekre
* Negatív függvény határozott integráljának számítása
* A határozott integrál és a terület – az előjeles terület bevezetése
* Az integrál közelítő kiszámítása (számológép, számítógép használata a határozott integrál meghatározásához)
* Matematikatörténeti áttekintés: Riemann
* Korlátos és monoton függvények integrálhatóságának megállapítása
* A határozott integrál tulajdonságainak áttekintése: a függvény számszorosának határozott integrálja, összeg és különbség határozott integrálja
* Az integrál, mint a felső határ függvényének vizsgálata
* Az integrálfüggvény bevezetése
* Folytonos függvény integrálfüggvényének deriválhatóságának megmutatása
* Kapcsolat keresése a differenciálszámítás és az integrálszámítás között
* A primitív függvény fogalmának bevezetése
* A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál bevezetése
* Hatvány függvény, polinom függvény integráljának megállapítása
* Trigonometrikus függvények integráljának meghatározása
* Exponenciális függvény, logaritmusfüggvény integráljának kiszámítása
* A határozatlan integrál néhány tulajdonságainak megkeresése: a függvény konstans szorosának határozatlan integrálja, összeg és különbség határozatlan integrálja
* A Newton–Leibniz-tétel bizonyítása és használata
* Integrálási módszerek keresése
* Parciális integrálás alkalmazása
* Integrálás helyettesítéssel
* Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra
* Két függvénygörbe közötti terület meghatározása
* Forgástest térfogatának, felszínének meghatározása
* Gyorsulásból sebesség, sebességből út (kitérés) számítása

*3. Térgeometria, felszín, térfogat*

Óraszám: 30 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
* ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
* ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat;
* sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
* ismeri a szabályos testeket;
* ismeri a terület és a térfogat tulajdonságait;
* ismeri a henger, hasáb, kúp gúla származtatását;
* ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;
* lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;
* ki tudja számítani az egyes testekhez rendelhető megfelelő gömbök sugarát;
* ki tudja számolni a testekhez tartozó szögeket (élekkel és lapokkal kapcsolatos szögek);
* ismeri a Cavalieri-elvet;
* kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát esetekben;
* ismeri az integrálszámítás alkalmazásának lehetőségeit a témakörben;
* ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket;
* ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket
* képes szélsőérték problémákat felismerni és megoldani.

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* A korábban kísérletezéssel, méréssel, szemlélet alapján megszerzett ismeretek mélyítése, elméleti hátterének megteremtése.
* A térszemlélet, az esztétikai érzék fejlesztése.

Fogalmak: Térelemek hajlásszöge. Felszín, térfogat, hengerszerű test, kúpszerű test, csonkagúla, csonkakúp, gömb.

Javasolt tevékenységek

* Térelemek illeszkedése, szöge, távolsága: a fogalmak áttekintése
* Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése
* Síkidomok kerületének, területének számolása
* Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése – sokszögek, kör
* Az ismert területképletek bizonyításának pontosítása
* Testek, szabályos testek áttekintése
* Poliéderek Euler tételének felismerése
* Szabályos testek: élek, lapok, szögek vizsgálata
* A térfogatszámítás alapelveinek rögzítése
* A Cavalieri-elv elemzése
* A hasáb származtatása
* Egyenes hasáb felszínének, térfogatának kiszámítása
* Forgáshenger felszínének, térfogatának számítása
* Ferde hasáb térfogatának elemzése
* A kúp és a gúla származtatása
* A gúla felszínének és térfogatának felírása
* A kúp felszínének, térfogatának értelmezése
* A közelítés módszerének megismerés: körkúp térfogata, felszíne
* Csonka gúla, csonka kúp származtatása
* A csonka gúla, csonka kúp térfogatának és felszínének kiszámolása
* A hasonlóság alkalmazása térgeometria problémákban
* Poliéderek térfogata elemzése
* A gömb térfogatának és felszínének megadás
* A Cavalieri-elv alkalmazása
* Az integrálszámítás alkalmazása
* A gömbbel kapcsolatos térgeometriai problémák, beírt gömb, körülírt gömb, élérintő gömb vizsgálata
* Matematikatörténeti áttekintés: Cavalieri.
* Összetett feladatok, szélsőérték feladatok, versenyfeladatok megoldása

*4. Matematikai logika, kombinatorika, gráfok*

Óraszám: 20 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* ismeri az állítás fogalmát;
* ismeri a kétváltozós logikai függvényeket és azok főbb tulajdonságait,
* ismeri az alapvető azonosságokat és tudja ezeket bizonyítani igazságtáblával;
* ismeri az és, a vagy, az ekvivalencia áramköri modelljét, és az alternatív kapcsolást;
* látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
* megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
* tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Korábban megismert fogalmak ismétlése, elmélyítése.
* Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban.

Fogalmak: Negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Nem és, nem vagy.

Javasolt tevékenységek

* Logikai műveletek: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia, igazságtáblázat.
* Azonosságok (De Morgan, asszociativitás, kétféle disztributivitás)
* A köznapi szóhasználat és a matematikai szóhasználat összevetése.
* Logikai azonosságok bizonyítása igazságtáblával.
* Analógia, a logikai és halmazelméleti műveletek kapcsolata.
* Kapcsolat az informatikával, logikai áramkörök, műveletek, tároló áramkörök (flip-flop);
* Eseményalgebra.
* Matematikatörténet: Varga Tamás, Pólya György, George Boole.
* Bizonyítási módszerek.
* Direkt bizonyítás, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulya elv, teljes indukció.

*5. Rendszerező összefoglalás*

Óraszám: 105 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

* képes lesz a tanultakat rendszerezni, egységben látni;
* a felmerülő problémákat a megfelelő matematikai ismeret előhívásával megoldani;
* helytállni az emelt szintű érettségi vizsgán írásban és szóban.

Fejlesztési feladatok és ismeretek

* Ismeretek rendszerezése, alkalmazása az egyes témakörökben.
* A szemléleten alapuló megközelítéstől a pontos matematikai fogalmak felé haladás.
* A megoldási módszerek tudatosítása, a problémákban alkalmazható közös modell, számítási-bizonyítási módszerek keresése.
* A tanult ismeretek alkalmazása gyakorlati problémákra is. betekintés a matematikatörténet néhány fejezetével, nagy egyéniségével a matematika épülésének folyamatába.
* Az érvelés módszerének gyakorlása, sejtések megfogalmazása, azok elfogadása vagy elvetése.
* Felkészítés a felsőfokú továbbtanulásra is az igényes matematikai gondolkodás fejlesztésével.

Fogalmak: A korábbiak áttekintése, kiemelések, megerősítések

Javasolt tevékenységek

* Gondolkodási módszerek áttekintése
* Halmazok, számhalmazok. Halmazok elemszáma. Végtelen halmazok számossága.
* A valós számok halmazának fogalma, a számkör bővítési lépéseinek áttekintése
* A komplex számok halmazának ismétlése
* Logikai ismeretek ismétlése
* Bizonyítási módszerek áttekintése: direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulya elv, teljes indukció
* Kombinatorika, gráfelmélet ismétlése
* Gráfok alkalmazása a problémamegoldás során
* Számelmélet, algebra áttekintése
* Számhalmazok összehasonlítása
* A valós számok halmazán értelmezett műveletek, műveleti tulajdonságok biztonságos használata
* Számelmélet áttekintése
* Oszthatósági alapfogalmak ismétlése, a matematika más területein való használat áttekintése
* Algebrai alapfogalmak, azonosságok ismétlése
* Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek megoldása
* Szöveges feladatok megoldása. A szükséges lépések kiemelése
* Másodfokú egyenlet, trigonometrikus egyenlet, exponenciális egyenlet és egyenlőtlenség megoldása
* Geometria ismétlése
* Mérés és mérték áttekintése
* A hosszúság, a terület, a térfogat mérése, a szögmérése
* Geometriai szerkesztések
* A geometriai transzformációk áttekintése, osztályozása
* Egybevágóság, hasonlóság ismétlése
* A szimmetrián alapuló állítások elemzése a geometriai alakzatok között
* A háromszögekre vonatkozó ismeretek ismétlése
* Négyszögekre, sokszögekre vonatkozó ismeretek áttekintése
* Körre vonatkozó ismeretek ismétlése. A kör részei, ezek területe, ívhossza.
* Vektorok, koordinátageometria ismétlése
* Trigonometria ismétlése
* A szögfüggvények és a hasonlóság kapcsolata szerepének áttekintése a fogalmak megalkotásában
* Geometriai alakzatok adatainak meghatározása szögfüggvényekkel, szinusztétellel, koszinusztétellel
* Sorozatok, függvények áttekintése
* Függvények grafikonjai, jellemzésük gyakorlása
* Sorozatok ismétlése
* A számtani és mértani sorozat alkalmazása
* Monotonitás és korlátosság ismétlése
* A határérték fogalmának mélyítése az ismétlés során is, a szemlélettől az absztrakció felé haladva
* Analízis ismétlése
* A differenciálszámítás és integrálszámítás alkalmazása
* Statisztika, valószínűségi problémák megoldása, a fogalmak frissítése
* Adatsokaságok elemzése
* Véletlen jelenségek vizsgálata
* A matematikatörténet néhány érdekes problémájának áttekintése. Matematikusokról a korábbi években szerzett ismeretek áttekintése.